

Cos'è un Grafo; concetti di base

Indice

G.0 – Introduzione	pag. 2
G.1 – Il grafo stradale regionale	pag. 7
G.2 – Relazioni tra grafo TPL e grafo stradale	pag. 11

Cos'è un Grafo; concetti di base

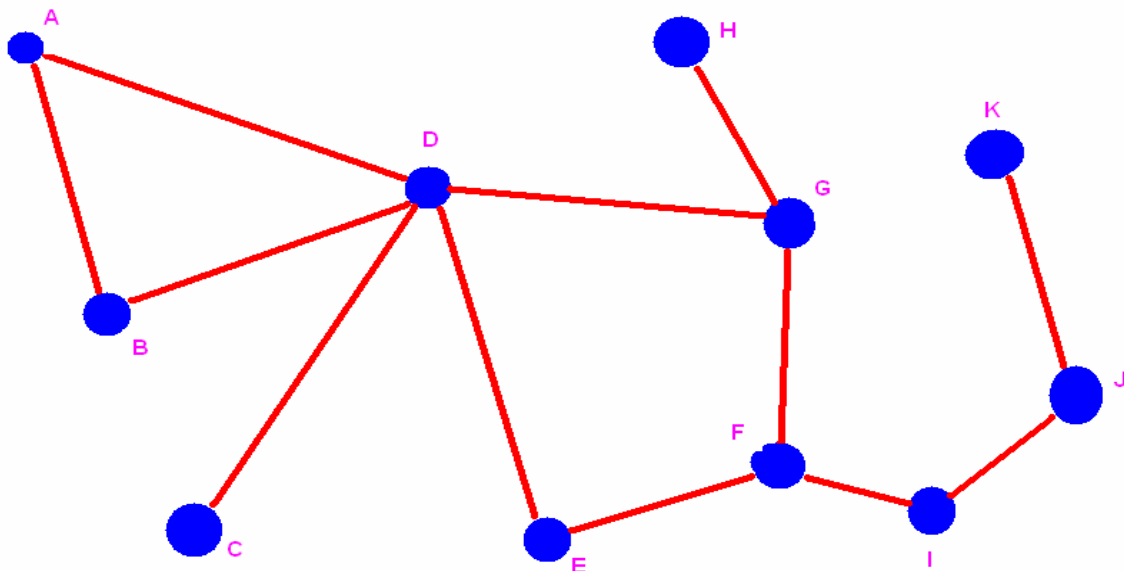
G.0 Introduzione:

Un grafo rappresenta uno strumento generale per esprimere secondo un formalismo ben definito delle relazioni di qualsiasi natura. Esiste una specifica branca specialistiche delle discipline matematiche che studia le proprietà generali dei grafi.

Un grafo può descrivere la struttura di una rete elettrica, di una rete fognaria e naturalmente di una rete stradale, ma sorprendentemente i grafi vengono utilizzati anche per lo studio delle modalità di diffusione delle malattie infettive, per lo studio delle relazione genetiche esistenti all'interno di una popolazione, per descrivere la struttura di Internet etc. etc.

Dato che il nostro ambito specifico di interesse è invece ristretto alla gestione della viabilità e dei percorsi del TPL, daremo di seguito per scontato che intendiamo il termine grafo nell'accezione specifica di grafo stradale.

Un grafo è un insieme di punti (*nodi del grafo*) connessi da linee (*archi del grafo*).



Nella figura precedente sono esempi di nodi i dischetti blu; i segmenti rossi identificano gli archi. Come possiamo vedere ogni nodo è identificato da una lettera. Gli archi possono essere identificati a loro volta utilizzando i simboli dei nodi che vengono connessi dall'arco.

Si noti che un *arco* è una entità caratterizzata da una direzione ben precisa (cioè è *vettoriale*); l'arco (A,B) è concettualmente distinto dall'arco inverso (B,A) che potrebbe anche non esistere affatto (nel caso di un grafo stradale si pensi p.es. ad un senso unico).

Il concetto di *grafo* è intrinsecamente *topologico*, in quanto devono essere rappresentate le *connessioni* esistenti tra nodi ed archi; già disponendo di un grafo di tipo topologico è perfettamente possibile utilizzarlo per tutte le funzioni p.es. di determinazione dei percorsi minimi.

Il senso reale del grafo è dunque quello di rappresentare *tutte le connessioni esistenti tra i diversi nodi*.

P.Es., riferendoci alla figura precedente, è del tutto intuitivo che per raggiungere il nodo E a partire dal nodo C occorrerà necessariamente attraversare il nodo D, dato che non esiste alcuna connessione diretta (C-E).

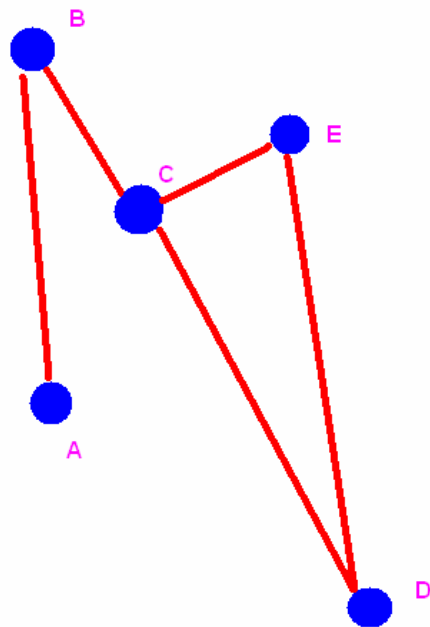
Potremmo seguire a scelta il percorso (C-D-E) come anche (C-D-G-F-E); in ogni caso riusciremmo a raggiungere E partendo da C.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A		x		x							
B	x			x							
C				x							
D	x	x	x		x		x				
E				x		x					
F					x		x		x		
G				x	x		x				
H							x				
I						x				x	
J										x	x
K										x	

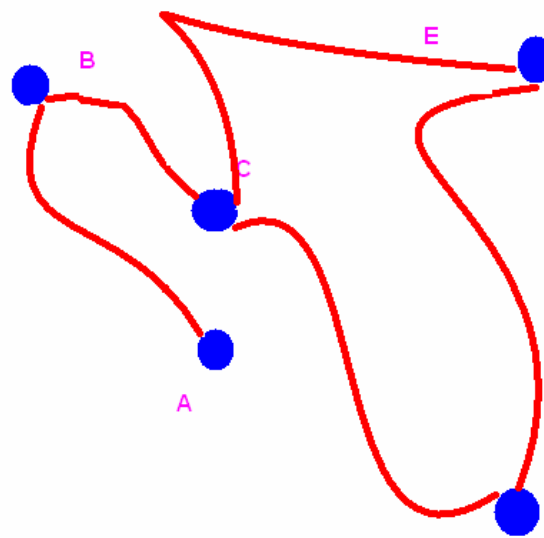
Si noti che non è affatto necessario utilizzare una rappresentazione di *tipo grafico* per rappresentare adeguatamente un grafo, in quanto è perfettamente possibile descriverlo utilizzando una rappresentazione di *tipo tabellare*, come mostrato in figura.

Ciononostante la rappresentazione *topografica* del grafo (legata cioè al precisa rappresentazione in scala dei nodi e degli archi) rappresenta un ulteriore arricchimento del grafo, pur non essendo affatto necessaria a rigor di termini.

Grafo Topologico



Grafo Topografico

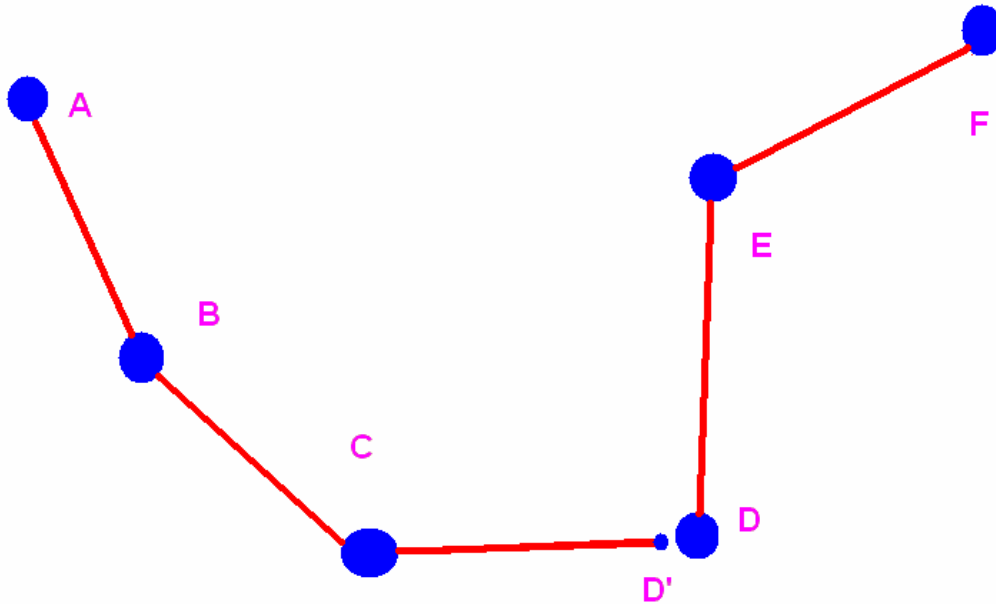


I due grafi mostrati in figura paiono profondamente differenti, almeno a prima vista; infatti le *rappresentazioni topografiche* sono assai differenti.

Tuttavia sono *perfettamente equivalenti* dal punto di vista *topologico*; se infatti non ci limitiamo a considerare la *forma* del grafo, ma consideriamo invece le *connessioni*, possiamo accorgerci che nulla cambia tra le due rappresentazioni alternative.

Resta il fatto che solamente il *grafo topografico* può essere utilizzato per ottenere una rappresentazione cartografica soddisfacente.

Nel caso in cui il grafo debba essere utilizzato sia a fini topologici che topografici assume un rilievo critico la questione della *rigorosa coerenza spaziale degli elementi*. Si consideri la figura seguente:

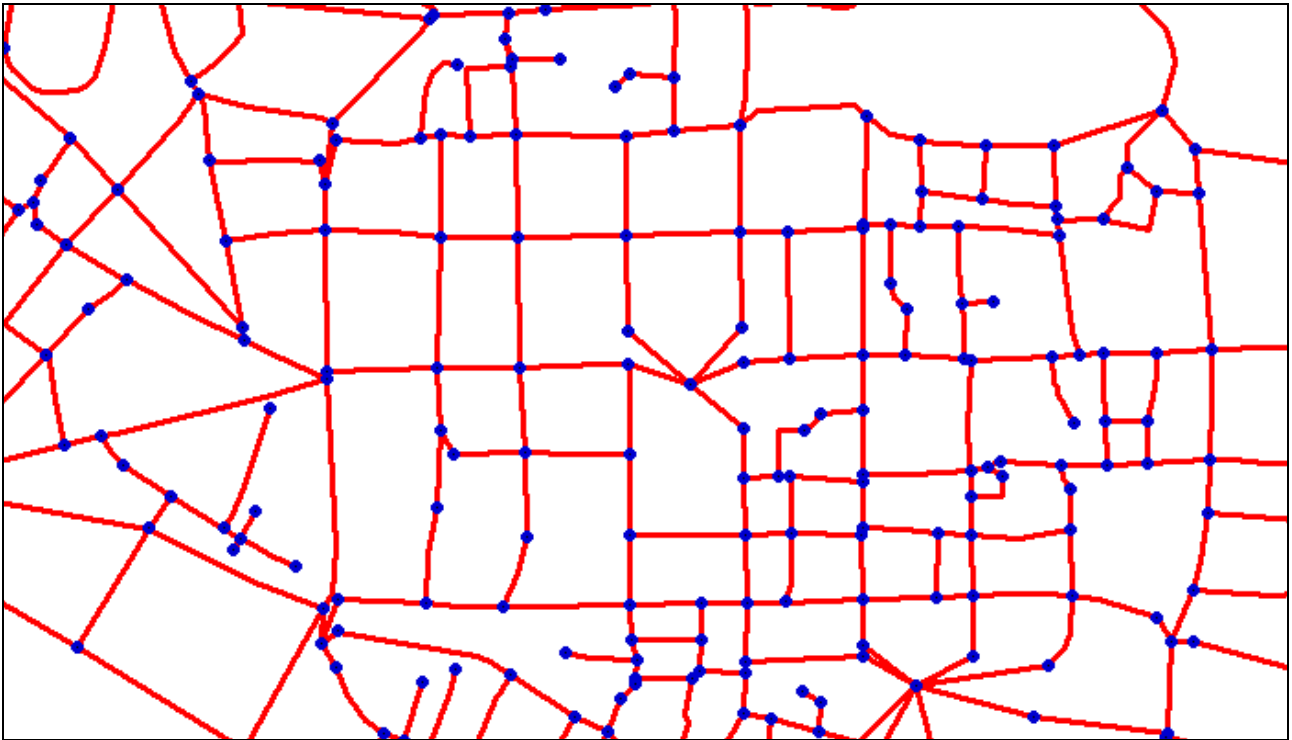


Dato che il nodo D' è (seppur di poco) separato fisicamente dal nodo D, ne consegue che non esiste una connessione reale (C-D); risulterà quindi assolutamente impossibile raggiungere p.es. F a partire da A.

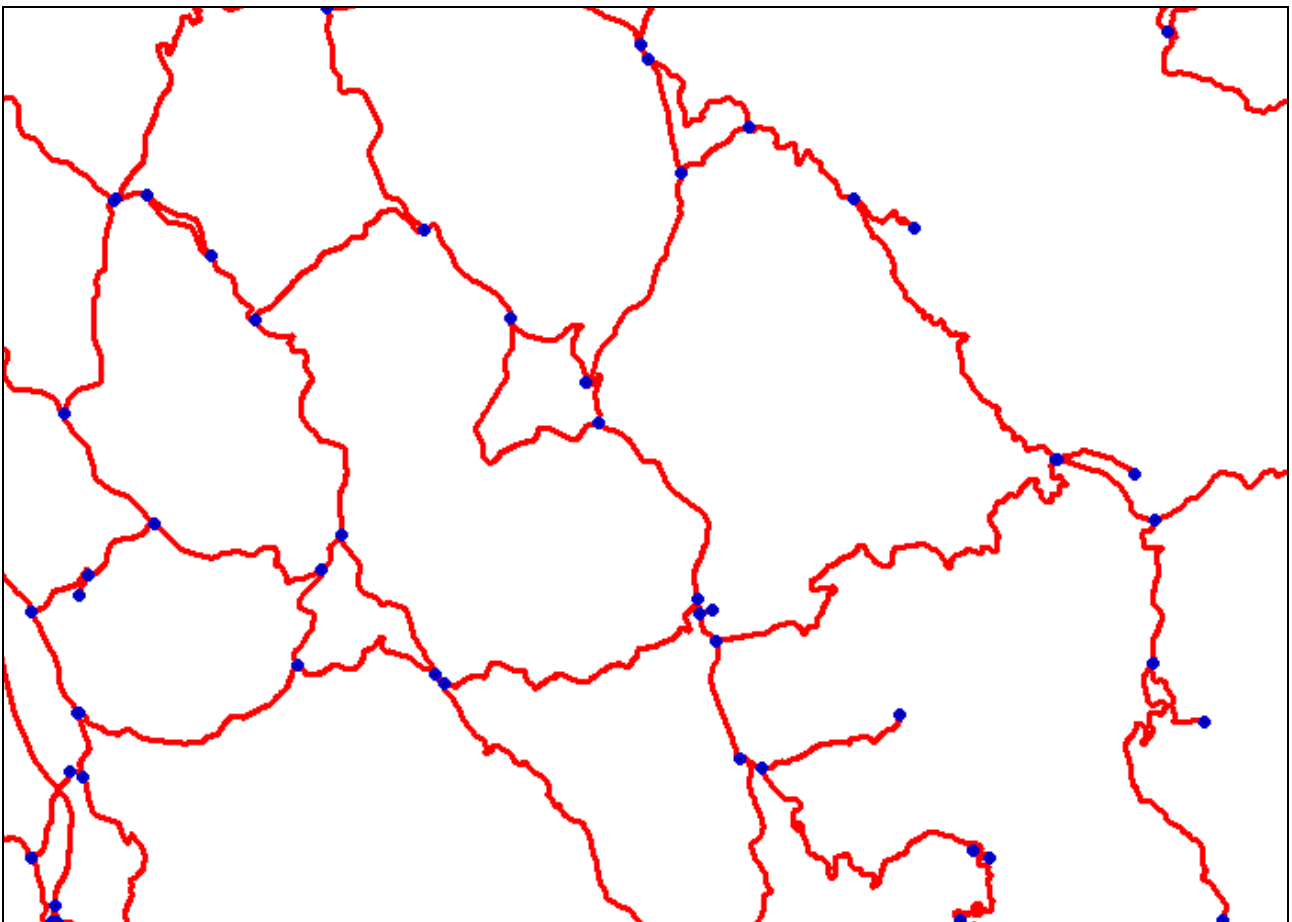
Di fatto un grafo come quello mostrato in figura non rappresenta una rete, ma piuttosto due reti fisicamente distinte; non risulterà quindi possibile “passare” da una rete all’altra.

Si noti che non ha alcuna importanza l’entità della differenza nelle coordinate di D' e D; anche un solo millimetro di scarto è sufficiente a causare l’interruzione della continuità spaziale del grafo. Al contrario un grafo gode di *coerenza spaziale* quando tutti gli archi presentano le coordinate cartografiche dei punti iniziali esattamente coincidenti con le coordinate dei nodi iniziali e terminali.

Nel linguaggio “gergale” degli applicativi GIS quando è garantita la perfetta coerenza spaziale degli elementi si dice che si realizza una condizione di *snap*.



Questa figura rappresenta un tipico esempio di grafo stradale in ambito urbano.



Qui viene invece illustrato un tipico esempio di grafo stradale in ambito extra-urbano.

Come possiamo vedere dal confronto delle due figure precedenti, di norma i grafi in ambito urbano sono caratterizzati da un gran numero di archi; i singoli archi hanno usualmente una lunghezza limitata (decine o centinaia di metri); infine molti archi tendono ad avere una semplice tipologia rettilinea.

Al contrario nei contesti extra-urbani gli archi tendono ad essere meno numerosi; i singoli archi in generale sono molto più lunghi (chilometri) e con geometrie più complesse ed articolate (curve e controcurve).

In ogni caso i singoli *nod*i coincidono con il centro di un *incrocio* o di una *confluenza*; i singoli *archi* rappresentano invece un tratto di *asse stradale* che connette due incroci consecutivi.

Ne consegue che quasi mai una *strada* è rappresentata da un *singolo arco*; è di gran lunga prevalente il caso in cui la medesima strada si compone di *svariati archi*.



In questo esempio possiamo vedere quale sia la reale complessità del grafo stradale rispetto alla cartografia di sfondo; anche se l'area mostrata rappresenta pochi isolati, gli archi necessari per ottenere una rappresentazione fedele della rete stradale sono numerosi.

G.1 Il grafo stradale regionale:

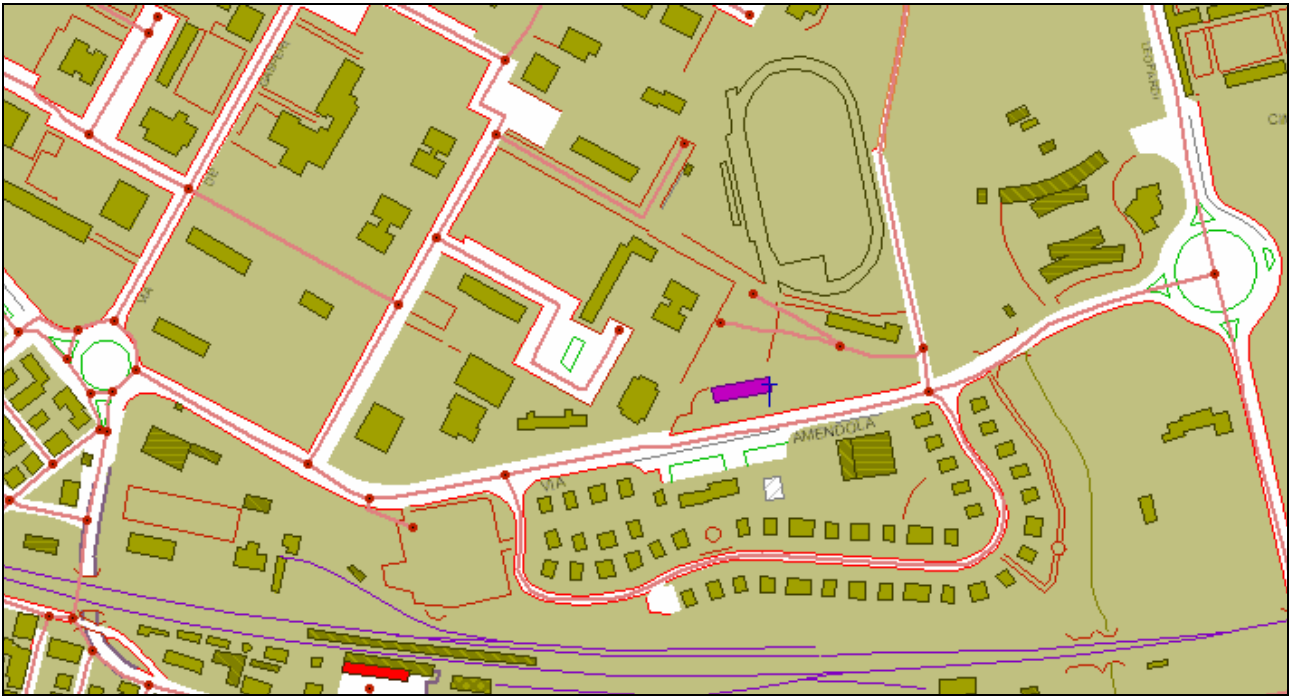
La Regione Toscana dispone di un grafo stradale che copre l'intero territorio regionale realizzato conformemente ai criteri illustrati nel paragrafo precedente. Il grafo stradale regionale gode quindi delle seguenti proprietà:

- Presenta una rigorosa coerenza topologica
- Offre una rappresentazione topografica perfettamente coerente con la Carta Tecnica Regionale in scala 1:10.000

Prima di procedere oltre è bene comprendere che per evitare l'eccessivo proliferare di *micro-archi* è stato assunto un criterio di ragionevole schematizzazione delle confluenze e degli svincoli.

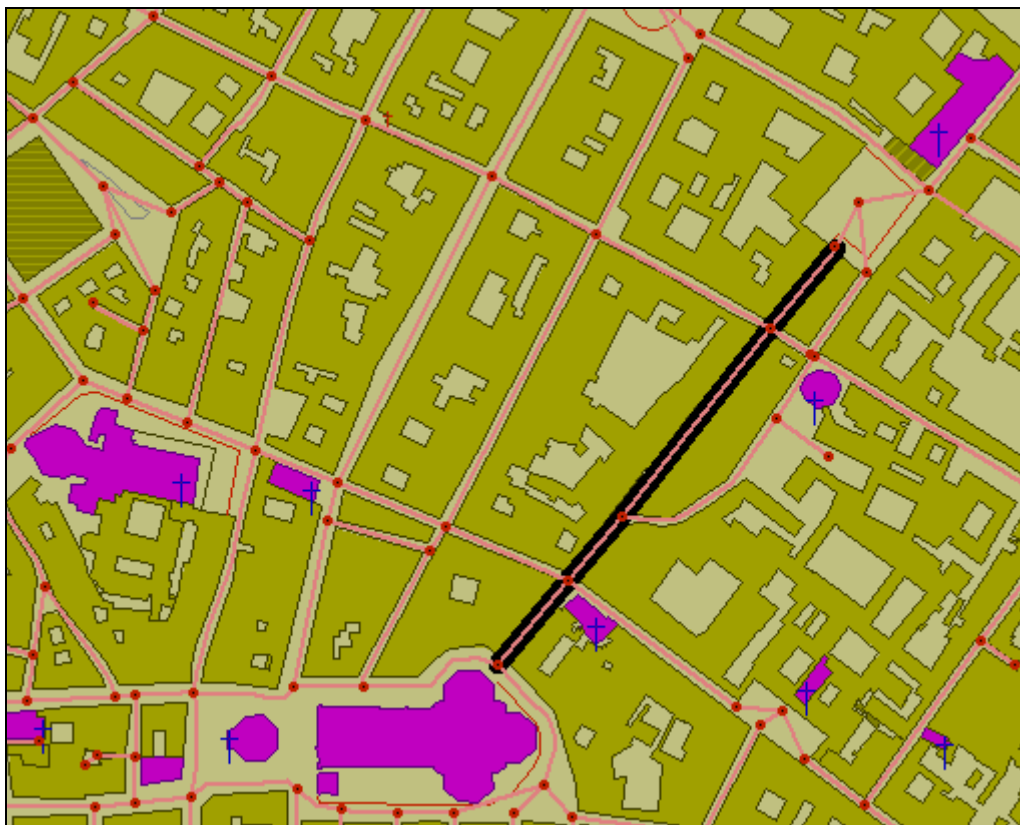


Come mostra la figura, i due incroci posti al centro della figura sono stati schematizzati in modo tale da consentire comunque tutte le manovre di svolta, pur se di fatto non sono rappresentati gli archi relativi alle varie corsie di preselezione.



Il criterio di semplificazione delle confluenze non sempre è stato interpretato in maniera rigorosamente coerente; nella figura possiamo vedere il caso curioso di due rotatorie: quella di sinistra rappresentata in *maniera completa*, mentre quella di destra al contrario è rappresentata in *maniera semplificata*.

In ogni caso non si tratta di un vero problema, dato che sostanzialmente le due rappresentazioni sono perfettamente equivalenti in termini funzionali, considerando trascurabile la differenza di poche decine di metri nella determinazione della lunghezza del percorso.



All'interno del grafo regionale ogni singola **strada** è identificata da un codice univoco e da un toponimo. In figura vediamo evidenziata la strada di codice **RT04802447PA** e toponimo **VIA DEI SERVI** (Firenze).

Dato che nel caso in esempio Via dei Servi presenta tre incroci intermedi, verranno impiegati quattro distinti **archi stradali** per la sua rappresentazione.



In figura possiamo vedere evidenziato uno degli quattro archi che rappresentano Via dei Servi; anche gli archi sono identificati da un codice univoco, che nel caso in esempio è **RT04808269ES**. Analogamente anche i **nodi** del grafo stradale sono identificati da un codice

univoco. L'arco stradale evidenziato, p.es., collega il nodo **RT04806848GZ** con il nodo **RT04806892GZ**.

Occorre infine notare come il grafo stradale regionale *non è affatto un grafo qualificato*. Allo stato attuale non è assolutamente presente nessuna informazione relativa alle condizioni fisiche della sede stradale, alla normativa di circolazione etc. Non è quindi assolutamente possibile sapere se un dato arco stradale è effettivamente percorribile o meno.

Possono infatti verificarsi le seguenti cause che impediscono la transitabilità fisica di un arco:

- Esiste un divieto di transito permanente (o temporaneo) che impedisce la circolazione in uno oppure in entrambi i versi (divieto di transito, ZTL, divieto di transito per i mezzi pesanti, cantiere di lavoro etc)
- Le caratteristiche della sede stradale non consentono il transito al veicolo che intendiamo farvi transitare. P.es. sarebbe possibile transitare con un ciclomotore su una strada vicinale sterrata e dal fondo sconnesso, oppure su vicoli urbani molto stretti, mentre invece il transito risulterebbe assolutamente impossibile per un autobus articolato.

Purtroppo nessuna di queste informazioni è disponibile nel grafo regionale, neppure in forma schematica ed approssimativa.

G.2 Relazioni tra grafo TPL e grafo stradale:

Per potere descrivere i percorsi del TPL in maniera rigorosamente coerente con il grafo stradale regionale occorre esaminare in dettaglio alcuni concetti-base.

E' perfettamente ammissibile descrivere l'intera rete dei servizi TPL in termini di grafo normalizzato. Basta considerare il fatto che gli autobus circolano su una sede stradale che per definizione deve essere descritta all'interno del grafo stradale regionale.

Tuttavia, considerate alcune caratteristiche specifiche delle reti TPL è opportuno introdurre il concetto di grafo TPL.

Il modo più naturale di definire il grafo TPL è quello di partire dalle entità fisiche in cui si articola il servizio. In questo modo tra l'altro si opera in modo immediatamente familiare per gli addetti del settore.

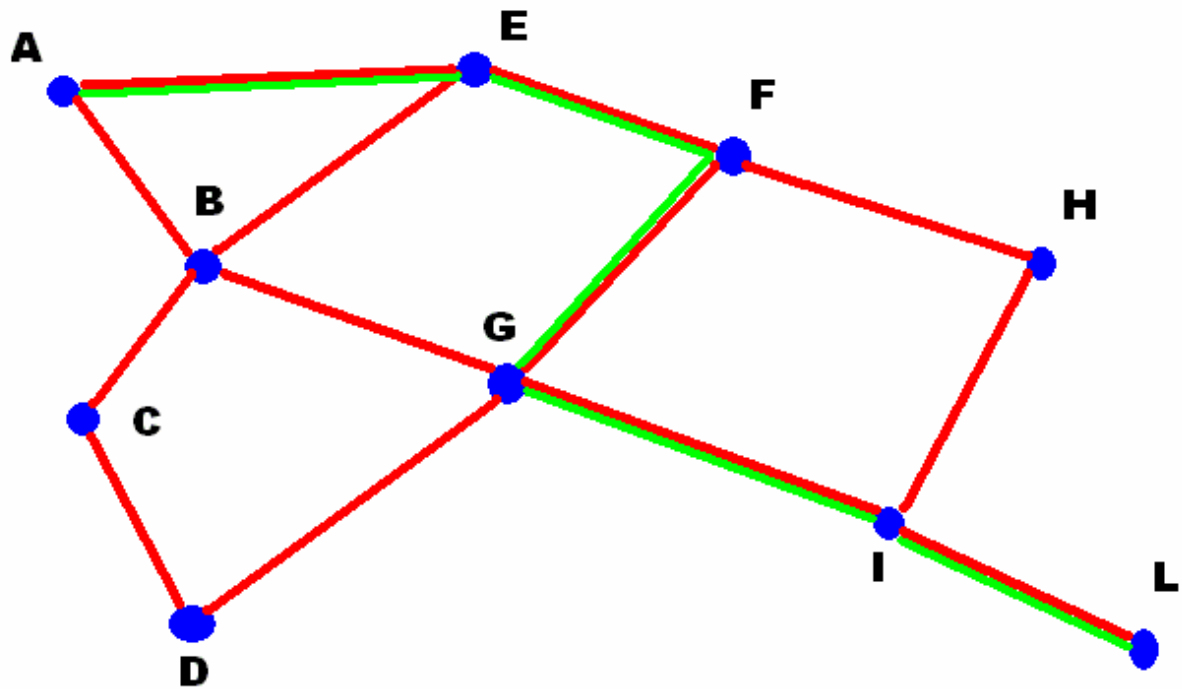
Si parte quindi dal concetto ben familiare di fermata, cioè di un punto fisico ben identificato e normalmente caratterizzato dalla presenza di una palina ubicata sul marciapiede o sul ciglio strada. A partire da una data fermata/palina l'autobus segue naturalmente un determinato instradamento per raggiungere la fermata/palina successiva. Abbiamo quindi una tratta che collega due paline consecutive.

A questo punto abbiamo identificato gli elementi costitutivi del grafo TPL; le paline/fermate rappresentano i nodi del grafo, mentre le tratte ne rappresentano gli archi.

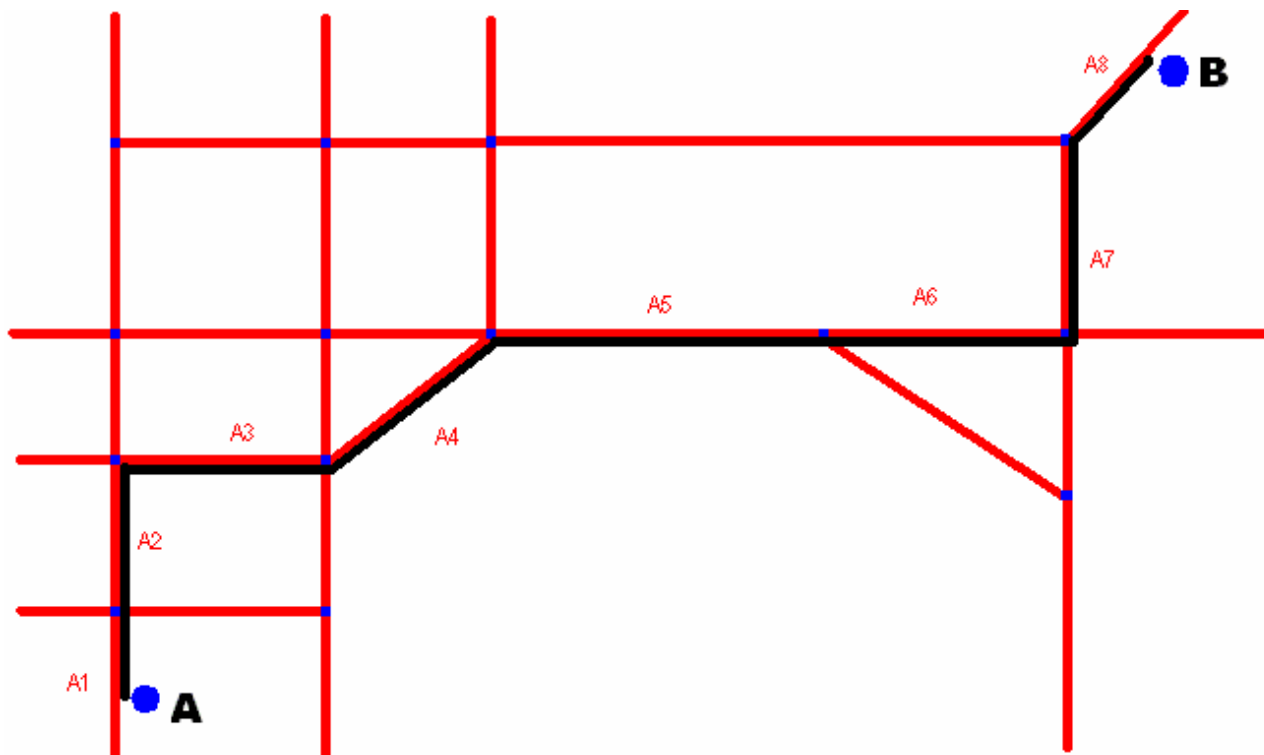


Dato che le fermate/paline sono collocate a bordo strada conformemente al verso di circolazione, ogni singola tratta può essere percorsa esclusivamente in un verso. Considerando il caso in figura, abbiamo rappresentato due coppie di paline contrapposte sui due sensi di marcia (A1,A2 e B1,B2).

Dato che per ogni singola tratta è necessario identificare la fermata di partenza e la fermata di arrivo e che la tratta può essere percorsa esclusivamente andando dalla partenza verso l'arrivo, per descrivere la circolazione dell'autobus sia nel verso di andata che nel verso di ritorno occorrono quindi una coppia di tratte (A1-B1, B2-A2). Per maggiore chiarezza è stato rappresentato anche l'asse stradale.



Una volta che abbiamo descritto la rete TPL nei termini di un grafo articolato in fermate=nodi ed in tratte=archi risulta banale descrivere i percorsi degli autobus, cioè l'esatta sequenza di tratte/fermate che il mezzo deve seguire per andare dal capolinea di partenza della corsa fino a raggiungere il capolinea di arrivo della corsa. Nel caso mostrato in figura, il percorso evidenziato in verde si articola nelle tratte (A-E), (E-F), (F-G), (G-I) ed (I-L) percorse in sequenza.

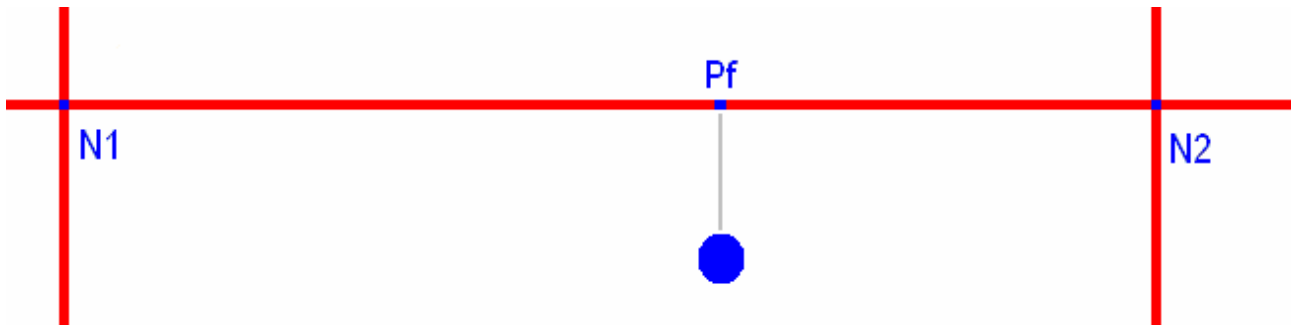


Se ora esaminiamo in dettaglio i rapporti che intercorrono tra gli elementi del grafo TPL e gli elementi del grafo stradale, è ovvio che deve esistere una *perfetta corrispondenza*, dato che dopo tutto l'autobus circola sicuramente all'interno della sede stradale.

Quindi la tratta del grafo TPL (A-B) può e deve essere descritta nei termini degli elementi corrispondenti del grafo stradale. Nel caso specifico occorrerà fare riferimento alla successione di archi stradali (A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7 ed A8).

Per caratterizzare pienamente una tratta appartenente al grafo TPL non occorre quindi definirne le caratteristiche topografiche, in quanto queste informazioni possono tranquillamente essere ricavare dal grafo stradale, una volta che siano rese esplicite le relazioni di corrispondenza relative.

Quindi non è affatto necessario *disegnare cartograficamente* le tratte; è invece sufficiente identificare *la successione ordinata degli archi stradali* da associare alla tratta.



Occorre considerare con cura il *caso particolare* rappresentato dagli archi iniziale e finale della successione ordinata degli archi stradali da associare alla tratta.

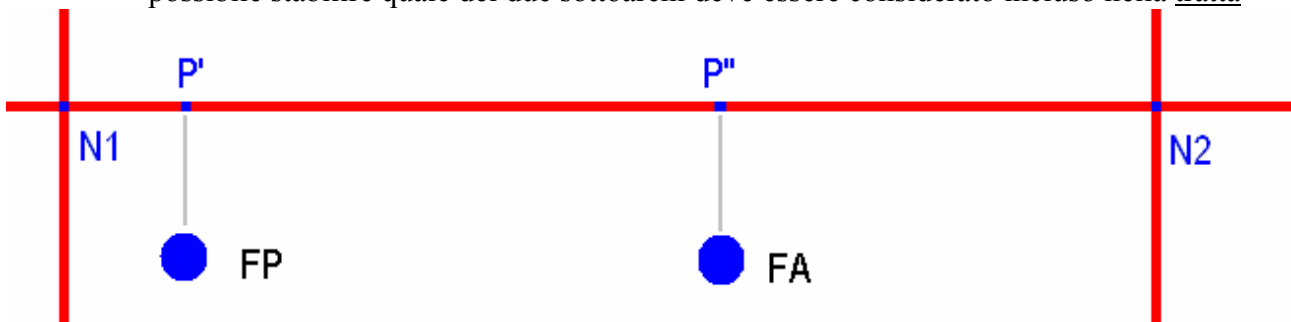
La schematizzazione assunta nel grafo stradale presuppone che la circolazione avvenga sull'asse strada; al contrario del fermate/paline del grafo TPL sono collocate al margine della sede stradale, e quindi di regola la fermata cade in vicinanza dell'arco stradale, ma non è ad esso sovrapponibile.

Inoltre, come regola generale, le paline sono collocate all'interno dell'arco stradale; infatti è assai raro il caso in cui la palina sia collocata in corrispondenza di un incrocio.

Quindi deve essere assunto come caso generale la fattispecie in cui il primo e l'ultimo degli archi stradali associati alla tratta del grafo TPL vengono percorsi *solo parzialmente*.

Fortunatamente il caso è risolvibile facilmente e senza complicazioni; basta considerare che:

- E' geometricamente determinabile il punto **Pf** che rappresenta la proiezione di minore distanza del punto palina sull'arco stradale.
- Risulta quindi possibile dividere l'arco stradale **N1-N2** nei due sottoarchi **N1-Pf** ed **N2-Pf**
- Dato che la tratta ha per definizione un verso di percorrenza assegnato, è sempre possibile stabilire quale dei due sottoarchi deve essere considerato incluso nella tratta



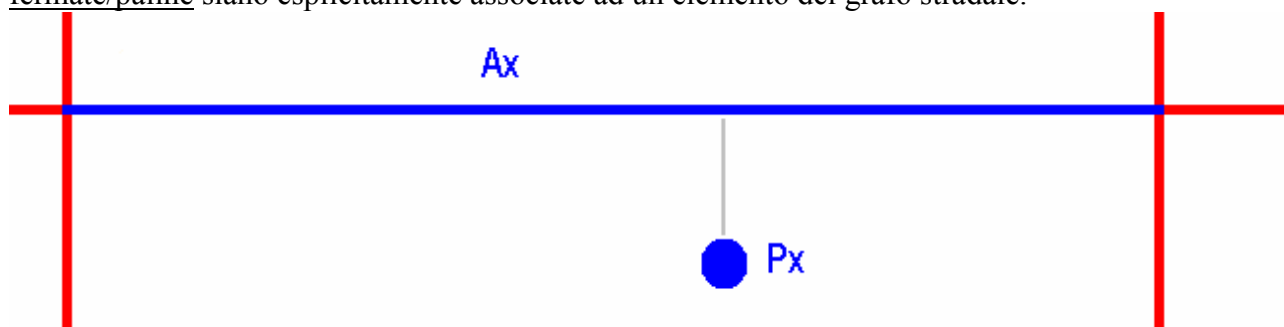
Un *caso estremamente particolare* (ma comunque riscontrato nelle reti TPL reali) è quello in cui sia la fermata di partenza che la fermata di arrivo della tratta insistono su di un unico arco stradale.

In questo caso avremo una successione ordinata degli archi stradali da associare alla tratta di tipo *degenerato*, in quanto la lista conterrà un unico articolo. Non solo. L'unico arco stradale associato alla tratta verrà percorso solo in parte.

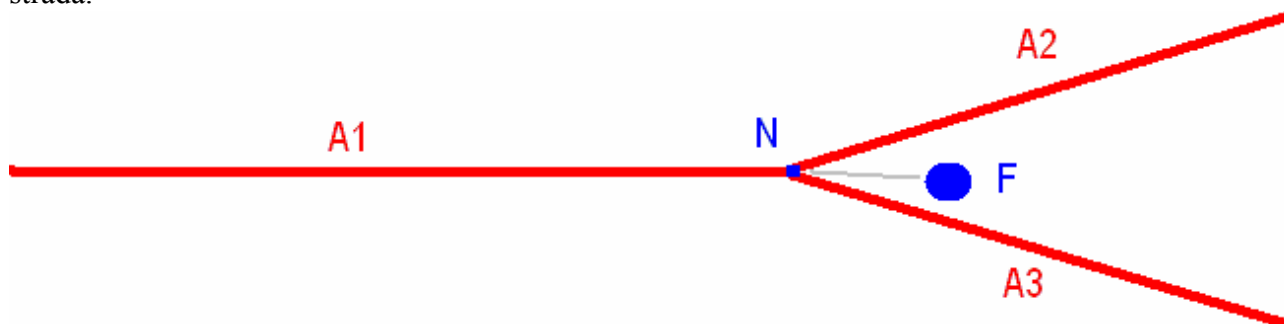
Anche questo caso è risolvibile analogamente a quanto visto al punto precedente; basta considerare che:

- E' geometricamente determinabile il punto **P'** che rappresenta la proiezione di minore distanza del punto palina partenza **FP** sull'arco stradale.
- Analogamente è determinabile il punto **P''** che rappresenta la proiezione di minore distanza del punto palina arrivo **FA** sull'arco stradale.
- Risulta quindi possibile dividere l'arco stradale **N1-N2** nei tre sottoarchi **N1-P'**, **P'-P''** ed **N2-P''**
- Dato che la tratta ha per definizione un verso di percorrenza assegnato, è quindi possibile definire il sottoarco **P'-P''** che deve essere considerato incluso nella tratta

Per garantire la massima coerenza tra il grafo TPL ed il grafo stradale è opportuno che le fermate/paline siano esplicitamente associate ad un elemento del grafo stradale.



Il *caso generale* prevede che la fermata/palina **Px** sia associata ad un arco stradale **Ax**; ovviamente in questa evenienza tutte le tratte del grafo TPL che hanno **Px** quale fermata di inizio tratta dovranno anche avere l'arco stradale **Ax** come primo articolo della sequenza ordinata di archi stradali associati alla tratta. Simmetricamente tutte le tratte del grafo TPL che hanno **Px** quale fermata di fine tratta dovranno anche avere l'arco stradale **Ax** come ultimo articolo della sequenza ordinata di archi stradali associati alla tratta. Dato che la circolazione in Italia deve avvenire sul lato destro della strada, anche la palina dovrà essere correttamente collocata sul lato conforme dell'asse strada.



Come *caso particolare deprecabile ma ammissibile*, occorre considerare che in alcune circostanze (specie nelle campagne) può accadere che la fermata/palina sia collocata nelle immediate adiacenze di una diramazione (magari in corrispondenza di uno slargo o di un piazzale), e che le corse in transito presentino gli instradamenti più disparati.

In questa eventualità è ammessa l'associazione della fermata/palina **F** non con un determinato arco stradale, ma con un nodo del grafo stradale **N**. In questa evenienza il primo (oppure l'ultimo) articolo della sequenza ordinata di archi stradali associati alla tratta potrà essere uno qualsiasi degli archi stradali che insistono sul nodo.

Nel caso mostrato in figura risulteranno quindi possibili i seguenti instradamenti:

1. Provenendo da **A1** si effettua fermata in **F** e quindi si prosegue per **A2**
2. Provenendo da **A1** si effettua fermata in **F** e quindi si prosegue per **A3**
3. Provenendo da **A2** si effettua fermata in **F** e quindi si prosegue per **A1**
4. Provenendo da **A2** si effettua fermata in **F** e quindi si prosegue per **A3**
5. Provenendo da **A3** si effettua fermata in **F** e quindi si prosegue per **A1**
6. Provenendo da **A3** si effettua fermata in **F** e quindi si prosegue per **A2**

Ovviamente in questo caso non è possibile stabilire alcun criterio di coerenza tra posizione della palina e verso di circolazione.